PART3 指数関数の導関数，対数微分法

要点整理と公式

要点 ① 指数関数の導関数

対数関数 $y=a^x$ の導関数を求める。

$y=a^x$ の両辺の自然対数をとると

$y=\quad a^x \qquad \log y=x\log a \qquad$ すなわち $\qquad \log y=(\log a)x$

両辺を x で微分すると

$\quad =\log a \qquad$ よって $\quad y'=y\log a$

したがって $\quad (a^x)'=a^x\log a$

とくに，$a=e$ のときは，以下が成り立つ。

$(e^x)'=e^x\log e=e^x$

以上より，次のことが成り立つ。

指数関数の導関数

$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\log a$

(ex) $y=e^{2x}$ の導関数は

$y'=\quad \cdot(2x)'=2e^{2x}$

$y=3^{-2x}$ の導関数は

$y'=\qquad \cdot(-2x)'=(-2\log 3)\cdot 3^{-2x}$

要点 ② 対数微分法

関数を微分するとき，両辺の自然対数をとって微分を行う「　　　　　　」という方法がある。y が x の関数のとき

$$\{\log|y|\}'=\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{y'}{y}$$

であることを利用する。

(ex) 関数 $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$ の導関数を対数微分法によって求める。

両辺の　　　　の対数をとって

$$\log|y|=\log\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|$$

$$=\log|x-1|-3\log|x+1|$$

両辺を x で微分すると

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{x+1-3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-2x+4}{(x-1)(x+1)}$$

したがって

$$y'=-\frac{2(x-2)}{(x-1)(x+1)}\cdot y=-\frac{2(x-2)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-1}{(x+1)^3}=-\frac{2(x-2)}{(x+1)^4}$$

対数微分法を用いることにより，$y=x^{\alpha}$ (α が実数)の導関数を求めることができる。

$y=x^{\alpha}$ の両辺の自然対数をとると

$\log y=\log x^{\alpha}$　　すなわち　　$\log y=\alpha\log x$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{x}$$

したがって　$y'=\dfrac{\alpha}{x}\cdot y=\dfrac{\alpha}{x}\cdot x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$

以上より，次のことが成り立つ。

x^{α} の導関数

α が実数のとき　$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{-x^2}$

(2) $y=x\cdot 3^x$

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$

(4) $y=x^{\log x}$

Point Pickup

指数関数の導関数

$(e^x)'=e^x$ $(a^x)'=a^x\log a$

対数微分法

積，商，累乗(べき乗)で表された関数の微分には，両辺の自然対数をとって微分を行う「対数微分法」が有効な場合がある。

第 9 講 PART3 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $y=e^{x^3}$

$y'=$ ア

① e^{x^3}　② xe^{x^3}

③ $x^2e^{x^3}$　④ $3x^2e^{x^3}$

2 $y=x\cdot 2^x$

$y'=$ イ

① $(1+x)2^x$　② $x\cdot 2^x\log 2$

③ $(x+\log 2)\cdot 2^x$　④ $(1+x\log 2)\cdot 2^x$

3 $y=\dfrac{e^x}{x^2}$

$y'=$ ウ

① $\dfrac{e^x-2x}{x^4}$　② $\dfrac{(x+1)e^x}{x^3}$

③ $\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$　④ $\dfrac{(x^2+1)e^x}{x^3}$

4 $y=x^x \quad (x>0)$

$y'=$ エ

① x^{x-1}　② $x^x\cdot\log x$

③ $x^x(\log x+1)$　④ $x^x(\log x-1)$

PART3 指数関数の導関数，対数微分法

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{-x^2}$

(2) $y=x\cdot 3^x$

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$

(4) $y=x^{\log x}$

[解答]

(1) $y'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

(2) $y'=(x)'3^x+x(3^x)'=3^x+x\cdot 3^x\log 3=(1+x\log 3)\cdot 3^x$

(3) $y'=\dfrac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\dfrac{e^x x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

(4) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log x^{\log x}=(\log x)^2$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=2\log x\cdot(\log x)'=2\log x\cdot\frac{1}{x}$$

よって $y'=2\log x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x^{\log x}=2x^{\log x-1}\log x$

第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$$y' = e^{x^3} \cdot (x^3)' \quad \text{[A]}$$

$$= \mathbf{3x^2 e^{x^3}}$$

[A]　$(e^x)' = e^x$
$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

2

[正解] イ：④

[解説]

$$y' = (x)' \cdot 2^x + x \cdot (2^x)' \quad \text{[B]}$$

$$= 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \log 2 \quad \text{[C]}$$

$$= \mathbf{(1 + x\log 2) \cdot 2^x}$$

[B]
$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

[C]　$(a^x)' = a^x \log a$

3

[正解] ウ：③

[解説]

$$y' = \frac{(e^x)'x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \quad \text{[D]}$$

$$= \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{xe^x - 2e^x}{x^3}$$

$$= \mathbf{\frac{(x-2)e^x}{x^3}}$$

[D]
$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

4　**[正解]** エ：③

[解説]

$x>0$ であるから，$y>0$ である。

両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log x^x \quad \text{[E]}$$

$$\log y=x\log x$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{y'}{y}=(x)'\log x+x\cdot(\log x)'$$

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

よって，

$$y'=y(\log x+1) \quad \text{[F]}$$

$$=\boldsymbol{x^x(\log x+1)}$$

[E]　対数微分法を利用する。

[F]　y に x^x を代入する。